Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 1 im Sommersemester 2021 (am 16.04.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

Vorlesung 1: Wiederholung

Herzlich willkommen zur ersten Vorlesung zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen im Sommersemesters 2021.

Ich beginne mit einer kurzen Erinnerung zur Einordnung dieser Theorie und zu den bereits besprochenden Gegenständen.

1. Bezeichnungen

Wie bisher sei

$$k$$

stets ein algebraisch abgeschlossener Körper, auf den wir uns als Grundkörper beziehen werden, und

$$k[T] = k[T_1,...,T_n]$$

sei die k-Algebra der Polynome in den endlich vielen Unbestimmten $T_1,...,T_n$ mit Koeffizienten aus k.

2. Begriff der algebraischen Gruppe (vgl. 2.1.1)

Eine algebraische Gruppe ist eine Gruppe G, die gleichzeitig eine algebraische Varietät (vgl. 1.6.1 und 1.6.9)[1] ist, d.h. ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, die isomorph ist zu einer affinen algebraischen Varietät(vgl. 1.4.3) d.h. der Nullstellenmenge

$$V(f_1,...,f_m) := \{p \in k^n \mid f_1(p) = ... = f_m(p) = 0 \}$$

von endlich vielen Polynomen

$$f_1,...,f_m \in k[T].$$

Die offenen Umgebungen dieser Gestalt heißen offene affine Umgebungen von G. Dabei sollen die Abbildungen

$$\mu: G \times G \longrightarrow G, (x,y) \mapsto x\bullet y, \text{ und } \iota: G \longrightarrow G, x \mapsto x^{-1},$$

welche die Gruppen-Struktur definieren, reguläre Abbildungen sein. Das sind Abbildungen, die lokal durch Quotienten von Polynomen gegeben sind. Genauer: zu jedem Punkt

$$(x,y) \in G\times G \text{ bzw. } z \in G$$

[1] wir vernachlässigen hier die Separabilitätsbedingung.

gibt es offene affine Umgebungen[2]

$U \subseteq k^n$ von x,

$U' \subseteq k^n$ von y und

$V \subseteq k^n$ von $\mu(x,y)$

bzw.

$U \subseteq k^n$ von z und

$V \subseteq k^n$ von $\iota(z)$

mit

$$\mu(U\times U') \subseteq V \subseteq k^n \text{ bzw. } i(U) \subseteq V \subseteq k^n$$

und derart, daß die Koordinatenfunktionen der Einschränkungen

$$\mu|_{U\times U'}: U\times U' \longrightarrow V \subseteq k^n,\ (x',y') \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1(x',y') \\ \dots \\ \mu_n(x',y') \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\iota|_U: U \longrightarrow V,\ x' \mapsto \begin{pmatrix} \iota_1(x') \\ \dots \\ \iota_n(x') \end{pmatrix},$$

<u>reguläre Funktionen</u> sind, d.h. für jedes i gibt es Polynome

$$p,q \in k[S_1,...,S_n, T_1,...,T_n] \text{ bzw. } u, v \in k[T_1,...,T_n]$$

mit

$$\mu_i(x', y') = \frac{p(x',y')}{q(x',y')} \text{ für } (x',y') \in U\times V \text{ bzw. } \iota_i(z') = \frac{u(z')}{v(z')} \text{ für } x' \in U'.$$

3. Reguläre Funktionen (vgl. 1.4.7)

Eine <u>reguläre Funktion</u> auf einer algebraischen Varietät X ist eine Abbildung

$$f: X \longrightarrow k,$$

die lokal durch Quotienten von Polynome gegeben ist, d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine affine offene Umgebung[3] $U \subseteq k^n$ von x und Polynome $u, v \in k[T]$ mit

$$f(x') = \frac{u(x')}{v(x')} \text{ für } x' \in U.$$

Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ bezeichnet

$$\mathcal{O}_X(U)$$

die k-Algebra der regulären Funktionen $U \longrightarrow k$. Für je zwei offene Teilmengen U,U' von X mit $U \subseteq U'$ definiert die Einschränkung auf U einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_X(U') \longrightarrow \mathcal{O}_X(U),\ f \mapsto f|_U. \tag{1}$$

---

[2] welche Teilmengen von G sind, die wir aber auch mit Teilmengen des k^n identifizieren, die Nullstellenmengen von Polynomen sind.

[3] Wir identifizieren die Teilmenge U von X mit einer Teilmenge des k^n, die durch Polynome definiert ist.

Durch die Abbildungen

$$\mathcal{O}_X : T(X) \longrightarrow \text{(k-Alg)'}, U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$$

zusammen mit den Abbildungen (1) ist ein kontravarianter Funktior auf der Kategorie

$$T(X)$$

definiert, welche durch den topologischen Raum X gegeben ist (die Objekte sind die offenen Mengen von X, die Morphismen die Inklusionen dieser offenen Mengen) mit Werten in der Kategorie

$$\text{(k-Alg)'}$$

der endlich erzeugten k-Algebren ohne nilpotente Elemente. Für affine offene Umgebungen U von X heißt

$$k[U] := \mathcal{O}_X(U)$$

Koordinatenring der affinen Varietät U. Ist $U = V(f_1,...,f_m) \subseteq k^n$, so besteht

$$k[U] = \{f|_U \mid f \in k[T]\}$$

gerade aus den Einschränkungen auf der als Abbildungen $k^n \longrightarrow k$ aufgefaßten Polyme

$$f \in k[T],$$

d.h. man hat einen surjetiven Homomorphismus von k-Algebren

$$k[T] \twoheadrightarrow k[U], f \mapsto f|_U,$$

dessen Kern das Ideal der Polynome ist, die auf U identisch Null sind,

$$I(X) := \operatorname{Ker}(k[T] \twoheadrightarrow k[U], f \mapsto f|_U),$$

und es gilt

$$\begin{aligned} I(X) &= \sqrt{f_1\bullet k[T]+...+f_m\bullet k[T]} \\ &:= \{f \in k[T] \mid \text{eine Potenz von f liegt in } f_1\bullet k[T]+...+f_m\bullet k[T]\}. \end{aligned}$$

Der Funktor $\mathcal{O}_X$ heißt Strukturgarbe der algebraischen Varietät X.

Zurück zu den algebraischen Gruppen. Unter den algebraischen Gruppen gibt es zwei Typen, deren Theorie extrem unterschiedlich ist, nämlich die linearen algebraischen Gruppen und die abelschen Varietäten.

4. Verschiedene Arten von algebraischen Gruppen

Eine lineare algebraische Gruppe ist eine algebraische Gruppen G, für welche G als algebraische Varietät bereits selbst eine affine algebraische Varietät ist. Eine abelsche Varietät ist eine algebraische Gruppe G, für welche G als algebraische Varietät eine projektive algebraische Varietät ist, d.h. G ist die Menge der gemeinsamen Nullstellen von endlich vielen homogenen Polynomen in einem projektiven Raum $\mathbb{P}^n_k$, sagen wir

$$G = \{[x] \in \mathbb{P}^n_k \mid F_1(x) = ... = F_m(x) = 0 \}$$

mit homogenen Polynomen

$$F_1,...,F_m \in k[T_0,...,T_n].$$

Die Theorie der abelschen Varietäten erfordert sehr viel weitergehende Ergebniss der algebraischen Geometrie als die Theorie der linearen algebraischen Gruppen. Insbesondere braucht man die Garben-Kohomologie der algebraischen Varietäten. Der Beweis des großen Fermatschen Satzes beruht auf tiefliegenden Ergebnissen zur Theorie der eindimensionalen abelschen Varietäten.

Man kann zeigen, für jede algebraische Gruppe G gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

von Homomorphismen algebraischer Gruppen, d.h. von Gruppen-Homomorphismen, die gleichzeitig reguläre Abbildungen sind, mit einer linearen algebraischen Gruppe A und einer abelschen Varietät P. Das bedeutet, um G zu verstehen, muß man zunächst A und P verstehen. Dann kann man Methoden der homologische Algebra einsetzen zur Untersuchung von G.

Die Theorie der linearen algebraischen Gruppen ist gewissermaßen der erste Schritt zum Verständnis der allgemeinen linearen Gruppen.

5. Einbettung in die allgemeine lineare algebraische Gruppe (vgl. 2.3.7)

Die linearen algebraischen Gruppen heißen “linear”, weil sie abgeschlossene Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppen

$$\mathbf{GL}_n$$

der umkehrbaren n×n-Matrizen sind.[4] Das war eines unserer ersten nicht-trivialen Ergebnisse im vergangenen Semester. Der Beweis beruht - wie nahezu alle bisherigen Ergebnisse - auf der Untersuchund des Koordinatenrings. Jede Operation einer algebraischen Gruppe G auf einer affinen Varietät X, sagen wir

$$G \times X \longrightarrow X, (g, x) \mapsto g\bullet x,$$

induziert eine Operation von G auf dem Koordinatenring von X, d.h. einen Gruppen-Homomorphismus

$$s:G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[X]), g \mapsto s(g),$$

mit

$$s(g)(f)(x) = f(g^{-1}\bullet x) \text{ für } g \in G, f\in k[X] \text{ und } x \in X.$$

Diese Operation kann man auch als Abbildung

$$G \times k[X] \longrightarrow k[X], (g, f) \mapsto s(g)f,$$

schreiben. Die entscheidende Eigenschaft dieser Operation ist ihre lokale Endlichkeit, d.h. für jeden endlich-dimensionalen linearen Unterraum

$$V \subseteq k[X], \dim_k V < \infty,$$

gibt es einen G-stabilen endlich-dimensionalen linearen Unterraum, der V enthält, sagen wir

$$W \subseteq k[X], \dim_k W < \infty, V \subseteq W \text{ und } s(g)\bullet W \subseteq W \text{ für jedes } g \in G.$$

Die Einschränkungen auf solche G-stabile lineare Unterräume W endlicher Dimension,

$$G \longrightarrow GL(W), g \mapsto s(g)|_W ,$$

sind Homomorphismen algebraischer Gruppen.

Diese Tatsache gestattet es Sätze der linearen Algebra zum Beweis von Aussagen über lineare algebraische Gruppen zu verwenden.

Die obige Aussage, daß jede lineare algebraische Gruppe isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe einer $\mathbf{GL}_n$ verwendet die Operation von G auf sich selbst durch Rechtstranslationen, d.h. die regulärre Abbildung

$$G \times G \longrightarrow G, (g, h) \mapsto h\bullet g^{-1}.$$

Den zugehörigen Homomorphismus s haben wir mit ρ bezeichnet,

[4] Und umgekehrt kann man sagen, die GL_n heißt allgemeine lineare Gruppe, weil sie jede lineare algebraische Gruppe “enthält”.

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k\, k[G],\ g \mapsto \rho(g),$$

mit

$$\rho(g)(f)(x) = f(x\bullet g) \text{ für } g,x \in G \text{ und } f\in k[X].$$

Den gesuchten Isomorphismus mit einer abgeschlossenen Untergruppe einer $\mathbf{GL}_n$ erhält man, indem man einen G-stabilen linearen Unterraum

$$W \subseteq k[G]$$

von endlicher Dimension konstruiert, der den Koordinatenring k[G] als k-Algebra erzeugt. Er hat dann die Gestalt

$$G \longrightarrow GL(W) = \mathbf{GL}_n\ ,\ g \mapsto \rho(g)|_W.$$

Dieselbe Operation ρ haben wir im vergangenen Semester verwendet, um die Theorie der Jordanschen Normalform aus der linearen Algebra in eine Konstruktion der Theorie der linearen algebraischen Gruppen zu überführen.

6. Invariante Version der Jordan-Zerlegung (vgl. 2.4.4)

Zunächst haben wir die Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform in einer koordinatenfreien Version bewiesen: jeder linare Endomorphismus

$$a: V \longrightarrow V$$

eines endlich-dimensionalen k-Vektorraums besitzt genau eine Zerlegung

$$a = a_s + a_n$$

in einen halbeinfachen Endomorphismus a_s (d.h. einen Endomorphismus, für welchen V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt) und einen nilpotenten Endomorphismus a_n (d.h. eine Potenz von a_n ist Null) mit

$$a_s\bullet a_n = a_n\bullet a_s.$$

7. Mulitplikative Jordan-Zerlegung (vgl. 2.4.5)

Ist a umkehrbar, so kann man diese Zerlegung auch multiplikativ schreiben als

$$a = a_s\bullet(1 + a_s^{-1}a_n) = a_s\bullet a_u$$

Wir erhalten die Zerlegung von a in ein Produkt aus einem halbeinfachen und einem unipotenten Endomorpismus a_u (d.h. 1-a_u ist nilpotent). Auch diese Endomorphismen kommutieren,

$$a_s\bullet a_u = a_u\bullet a_s,$$

und die Zerlegung ist eindeutig.

8. Verallgemeinerung auf den lokal endlichen Fall (vgl. 2.4.7)

Als nächstes haben wir gezeigt, daß die Jordan-Zerlegung auch für unendlich-dimensionale Vektorräume V existiert und eindeutig ist, sobald die Operation des Endomorphismus

$$a: V \longrightarrow V$$

lokal endlich ist (d.h. jeder Vektor von V liegt in einen a-stabilen Unterraum endlicher Dimension), wenn man von a_n bzw. a_u nur die lokale Nilpotenz bzw. die lokale Unipotenz fordert (die Einschränkungen endlich-dimensionale a-stabile Unterräume sollen nilpotent bzw. unipotent sein). Die entscheidenden Eigenschaft dieser Zerlegung besteht darin, daß sie mit linearen Abbildungen verträglich ist: für lineare Abbildungen

$$a: V \longrightarrow V,\ b: W \longrightarrow W,\ \phi: V \longrightarrow W$$

mit

$$a, b \text{ lokal endlich und } \phi\circ a = b\circ\phi$$

gilt auch

$$\phi\circ a_s = b_s\circ\phi\ ,\ \phi\circ a_n = b_n\circ\phi \text{ und } \phi\circ a_u = b_u\circ\phi.$$

Insbesonder haben wir für jede algebraischen Gruppe G und jedes $g\in G$ eine multiplikative Jordan-Zerlegung

$$\rho(g) = \rho(g)_s\bullet\rho(g)_u.$$

Diese haben wir verwendet zur Konstruktion einer

9. Jordan-Zerlegung in algebraischen Gruppen (vgl. 2.4.8)

Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Jordan-Zerlegung in G. Für jedes $g \in G$ gibt es genau ein Paar (g_s, g_u) von Elementen aus G mit den folgenden Eigenschaften.

1. $g = g_s\bullet g_u = g_u\bullet g_s$
2. $\rho(g_s) = \rho(g)_s$ und $\rho(g_u) = \rho(g)_u$.

(ii) Für jeden Homomorphismus $\phi: G \longrightarrow G'$ von algebraischen Gruppen und jedes $g\in G$ gilt

$$\phi(g_s) = \phi(g)_s \text{ und } \phi(g_u) = \phi(g)_u.$$

(iii) Für $g \in G = GL_n$ sind g_s und g_u gerade die halbeinfachen bzw. unipotenten Teile von g (im Sinne der Bemerkung von 2.4.5 mit $V = k^n$).

Diese Aussage ist grundlegend für die gesamte weitere Theorie. Wir sie zunächst zur Untersuchung von auflösbaren und nilpotenten linearen algebraischen Gruppen verwenden.

Index

Inhalt